

Teoria da Relatividade

INTRODUÇÃO

No século XIX, a maior velocidade já observada era a velocidade da luz ($3 \cdot 10^8$ m/s)¹. Por volta de 1860, o britânico James Clerk Maxwell, trabalhando com as equações da eletrostática e do magnetismo, encontrou uma onda que se propagava com a velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}$ no vácuo (sendo μ_0 a constante de permissividade magnética no vácuo e ϵ_0 a constante de permissividade elétrica no vácuo). Dessa forma, ele conseguiu mostrar que a luz e ondas de radiofrequência entre outras, eram ondas da mesma natureza: unificou-se assim a teoria do magnetismo com a teoria da eletricidade, tornando-as numa única teoria, que é o eletromagnetismo.

Na mesma época (por volta de 1880) surgiu um outro problema: da mesma forma que o som se move com uma velocidade da ordem de 340 m/s em relação ao ar, a luz se move com velocidade c com relação a que? Qual o referencial para o qual as equações de Maxwell valeriam?

TRANSFORMAÇÕES GALILEANAS

Antes de continuar, vamos estudar o que já sabemos: vejamos como mudar de referencial utilizando as transformações de Galileu.

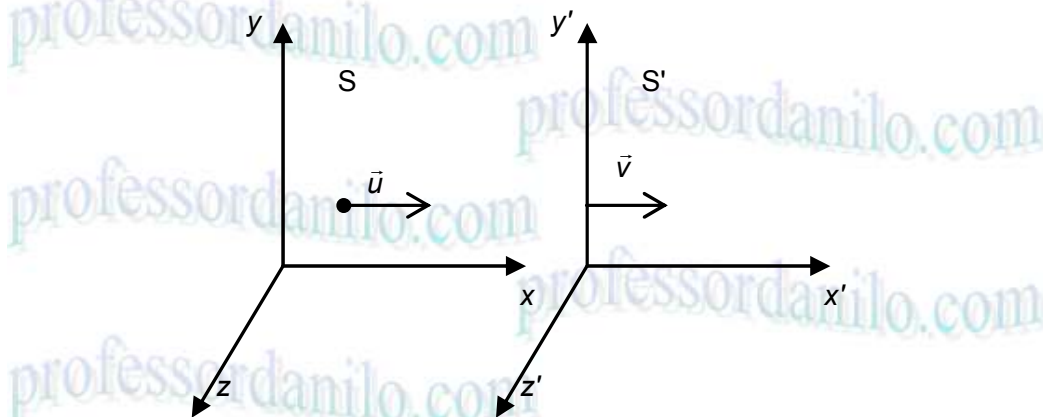


Figura 1: Referenciais S e S'. Este último se movendo para a direita com módulo da velocidade igual à v relativamente à S.

¹ Atualmente o valor da velocidade da luz é definido como sendo exatamente igual à 299.792.458 m/s. Isto porque a unidade de comprimento do S.I. (o metro) é definido como sendo a distância que a luz percorre em $1/299.792.458$ s.

Seja um referencial S no qual nós nos encontramos e um referencial S' se movendo com velocidade \vec{v} na direção de x relativamente a S. Suponha que no instante $t = 0$ s a origem de ambos os referenciais fossem coincidentes e que os eixos x-x', y-y' e z-z' sejam paralelos, assim, para mudarmos de referencial, isto é, para obtermos a medida obtida por um observador em S', fazemos:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Agora, imaginemos um objeto se movendo em relação a S, na direção de x, com velocidade \vec{u} . Derivando as equações dos espaços:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d(vt)}{dt} \Rightarrow u' = u - v$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \Rightarrow 0 = 0$$

Observe que encontramos a equação da velocidade relativa $u' = u - v$. Agora, ao derivarmos esta equação (veja que se as componentes da velocidade em y e z são nulas, também serão as componentes em y' e z'), obtemos a aceleração que, se multiplicada pela massa (supondo que não dependa do referencial), obtemos a equação da força:

$$\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} \Rightarrow a' = a - 0 \Rightarrow ma' = ma \Rightarrow F' = F$$

Isto é, a força medida em um referencial inercial (uma vez que nosso sistema S' não está acelerado) é igual à força medida em outro referencial. Observe que esta é a primeira lei de Newton e uma das suas conseqüências é que as leis da Dinâmica são válidas em todos os referenciais Inerciais.

Observe que fizemos várias observações "óbvias", como $t = t'$, $m = m'$, se o corpo não tem velocidade em y, então não terá em y'. Embora assim pareçam óbvias, assim também achou Newton quando formulou suas teorias, entretanto nem todas essas observações se comprovaram verdadeiras, isto é, o tempo e a massa podem depender do referencial.

Por volta de 1900, muitas pessoas perceberam que as leis da Dinâmica eram todas invariáveis ao mudar de referencial. Entretanto, as novas descobertas de Maxwell não eram invariáveis ao mudar de referencial: embora μ_0 e ϵ_0 não

modem de referencial para referencial, as suas equações mudam, o que sugeriria que a velocidade da onda eletromagnética c mudasse, gerando uma incoerência nas suas equações. Isso sugeria uma coisa: haveria um meio com repouso absoluto no qual a luz se propagaria sempre com a mesma velocidade c . Este meio ficou conhecido como Éter.

MEDINDO A VELOCIDADE EM RELAÇÃO AO ÉTER

Muitos experimentos para medir a velocidade da luz em relação ao Éter foram criados, mas o mais preciso na época (± 1850 à 1890) e também o mais conhecido era o interferômetro de Michelson e Morley. Antes de entendermos tal experimento, vamos procurar entender a idéia principal do experimento. Para isso, vamos substituir o éter por um rio que se move com velocidade \vec{v} paralelamente em relação à margem e dois barcos que percorrem dois caminhos perpendiculares entre si, ambos de comprimento L e ambos os barcos com velocidade c . A figura a seguir representa esta proposta.

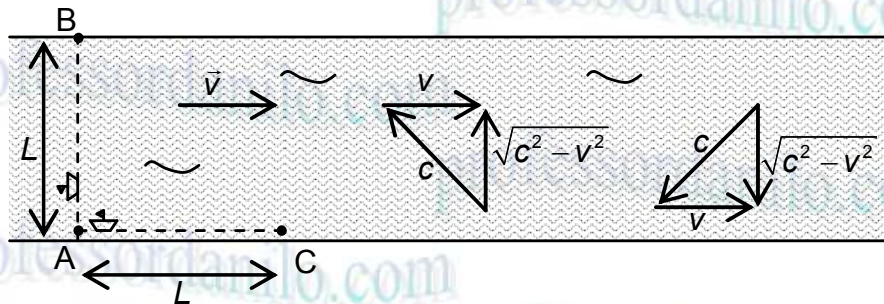


Figura 2: O problema dos dois barquinhos: um atravessando e voltando o rio com direção perpendicular à margem (de A a B) de largura L e o outro percorrendo uma distância L paralelamente à margem e voltando ao ponto inicial (de A à C).

Para o barco que saía de A até B e depois volta ao ponto A, podemos determinar o tempo de ida e volta com o auxílio dos triângulos também apresentados na figura acima. Observe que a velocidade, relativa à margem, é dada por $\sqrt{c^2 - v^2}$, assim o tempo t_1 pode ser calculado somando os tempos de ida e volta:

$$t_1 = t_{A \rightarrow B} + t_{B \rightarrow A} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow t_1 = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

O barco que sai do ponto A e vai ao ponto C e depois volta leva um tempo t_2 para realizar o trajeto, que pode ser calculado por:

$$t_2 = t_{A \rightarrow C} + t_{B \rightarrow C} = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \Rightarrow t_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Podemos utilizar a aproximação

$$(1+x)^n \approx 1+nx \text{ se } x \ll 1$$

Quando a velocidade $v \ll c$, podemos utilizar tal aproximação:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \text{ e } \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

Portanto:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{Lv^2}{c^3}$$

Supondo que os dois barcos tenham partido do ponto A, esta é a diferença de tempos gastos entre os tempos de ida e volta para ambos os barcos, quando saírem ao mesmo tempo do ponto A até C e B e voltarem ao ponto A.

O EXPERIMENTO DE MICHELSON E MORLEY

Michelson (em 1881) e posteriormente Michelson e Morley (em 1887) realizaram um experimento para medir a velocidade da luz em relação ao Éter. O experimento era muito parecido com o problema dos barquinhos descrito acima.

O esquema abaixo representa o aparelho utilizado por eles, conhecido como interferômetro de Michelson-Morley. E_S é um espelho semi-reflexivo que permite que parte da luz o atravesse e incida no espelho E_2 e parte seja refletido e atinja o espelho E_1 . Ao refletir nestes espelhos, os feixes luminosos voltam a incidir no espelho E_S e parte deles atingem o observador O. Em O será formada uma imagem de interferência e, se a teoria do Éter estiver correta, quando a fonte estiver se movendo relativamente ao Éter, podemos utilizar os resultados do problema dos barcos discutido anteriormente. Observe que se as distâncias entre E_S e E_1 e entre E_S e E_2 forem iguais, deveria observar uma diferença de tempo:

$$\Delta t = \frac{Lv^2}{c^3}$$

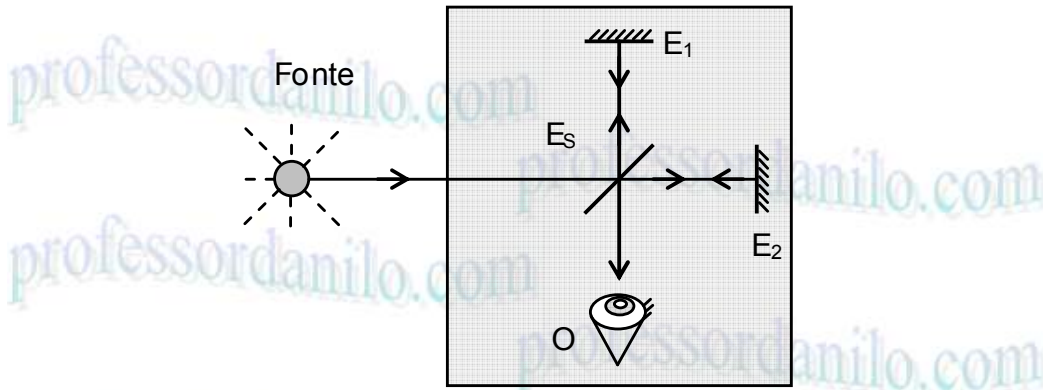


Figura 3: O interferômetro de Michelson-Morley é formado por uma fonte, um espelho semi-reflexivo (E_S) e dois espelho (E_1 e E_2).

A teoria do Éter estacionário implica que necessariamente, em algum momento, o interferômetro estará em movimento absoluto. Por exemplo, supondo que o Sol esteja em repouso absoluto (parado em relação ao Éter), a Terra está se movendo. Supondo que, por exemplo, a Terra esteja em determinado momento parada em relação ao Éter, então seis meses depois a Terra estará em movimento perpendicular ao Éter. O experimento descrito seria capaz de determinar este tempo mesmo para velocidades muito menores que a velocidade da Terra em torno do Sol (~30 km/s).

Ao contrário do que era esperado, o resultado foi

$$\Delta t = 0$$

Independente da velocidade da fonte, observador e espelhos, o resultado será sempre o mesmo! Com isso, concluiu-se que a velocidade da luz é a mesma em ambas as direções, assim surgiram muitas teorias para tentar explicar esses resultados. Dentre as teorias propostas, a que melhor explica esses e inúmeros outros resultados foi a Teoria da Relatividade. Vale a pena comentar que há fortes indícios de que Einstein, quando propôs esta teoria por volta de 1900 (em 1905 que seu artigo foi publicado), não sabia dos resultados da experiência de Michelson e Morley.

A TEORIA DA RELATIVIDADE

O Alemão Albert Einstein, na tentativa de conservar as equações da onda de Maxwell, propôs dois postulados:

1. Todas as Leis da Física (e não mais somente a da Dinâmica) são as mesmas para todos os referenciais Inerciais. Ou seja, não existe nenhum referencial inercial preferencial, assim deixa-se de lado a idéia de Éter. (Princípio da Relatividade)
2. A velocidade da Luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais. (Princípio da constância da velocidade da luz)

Este segundo postulado é particularmente interessante se pensarmos que Einstein não teve conhecimento dos resultados experimentais de Michelson e Morley.

Einstein inicia seu artigo, publicado originalmente em alemão, discutindo o problema para sincronizar marcadores de tempo (poderíamos entender como relógios) em um sistema referencial.

Imaginando um sistema de referência qualquer, por exemplo, um laboratório no qual serão realizados vários experimentos que ocorrerão em pontos diferentes. Digamos que os resultados serão coletados automaticamente, por um computador localizado junto a cada experimento. Por simplicidade, assumimos que todos os eventos (experimentos) ocorram ao longo de uma linha no laboratório, que vamos chamar de referencial S' . Também por conveniência, supomos que este laboratório fique dentro de um vagão de trem que, inicialmente, se encontra em repouso relativamente à estação.

Como poderíamos sincronizar os relógios de todos os computadores, localizados nos pontos dos experimentos?

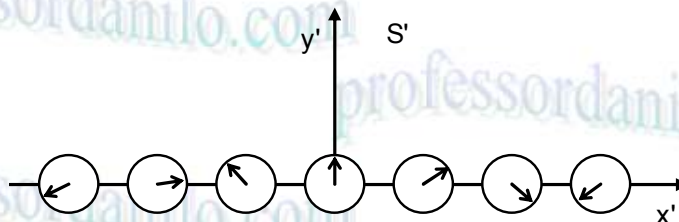


Figura 4: Relógios localizados na posição dos experimentos no referencial S' .

Se tivéssemos uma forma de enviar um sinal instantâneo para todos os relógios, garantiríamos que eles fiquem todos sincronizados. Entretanto, a maior velocidade observável é a da luz, logo poderíamos enviar um sinal luminoso partindo do relógio contido na origem quando este marca $t_0 = 0$ e ao receber o sinal, cada relógio ajusta o seu horário descontando o tempo gasto para a luz sair da origem e chegar no seu destino. Isto é, digamos que um relógio localizado na posição $x = L'$, ao receber o sinal ajustará o seu horário para $t' = L'/c$, que é o tempo gasto pela luz para percorrer a distância entre os dois relógios.

Assim, para o referencial S' poderíamos ajustar todos os relógios de tal forma que eles possam ficar sincronizados, conforme o esquematizado na figura 5.

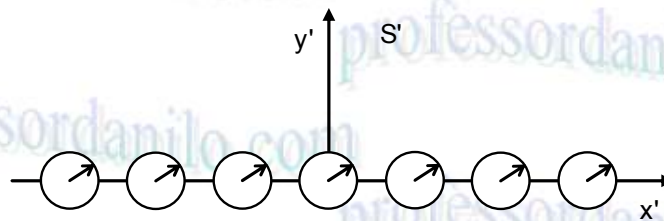


Figura 5: Todos os relógios no referencial S' estão sincronizados para um observador localizado na origem ($x' = 0$ e $y' = 0$).

Agora, imaginemos que este laboratório localizado no trem esteja se movendo em relação à plataforma (referencial S). Como a velocidade da luz não depende do referencial, é bastante razoável afirmar que os relógios podem ser sincronizados utilizando-se deste método. De fato, para um observador localizado em S' todos os relógios estão sincronizados. Imagine um feixe luminoso emitido de dois pontos simétricos em relação à origem de S' : um localizado no ponto A' e o outro em B' , ambos localizados a uma distância L da origem. Para facilitar o entendimento, imagine que a luz é proveniente da explosão de uma pequena bomba que permite fazer duas marcas no laboratório, uma em A' e outra em B' . Suponha que devido a esta explosão, duas marcas também aparecem no referencial S da plataforma, conforme o esquema da figura 7a, indicadas pelas letras A e B . Por fim, suponha que a velocidade do trem/laboratório seja comparável à da luz, porém menor que esta.

Na plataforma, da mesma maneira que no laboratório, estão localizados vários relógios que foram sincronizados utilizando-se do mesmo método (figura 6). Se estas duas bombas explodirem no mesmo instante para um referencial na plataforma, ocorrerá a sucessão de eventos descritas a seguir e representadas na figura 7.

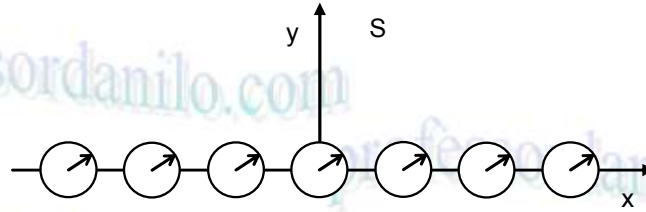


Figura 6: Todos os relógios no referencial S (plataforma) estão sincronizados para um observador localizado na origem ($x = 0$ e $y = 0$).

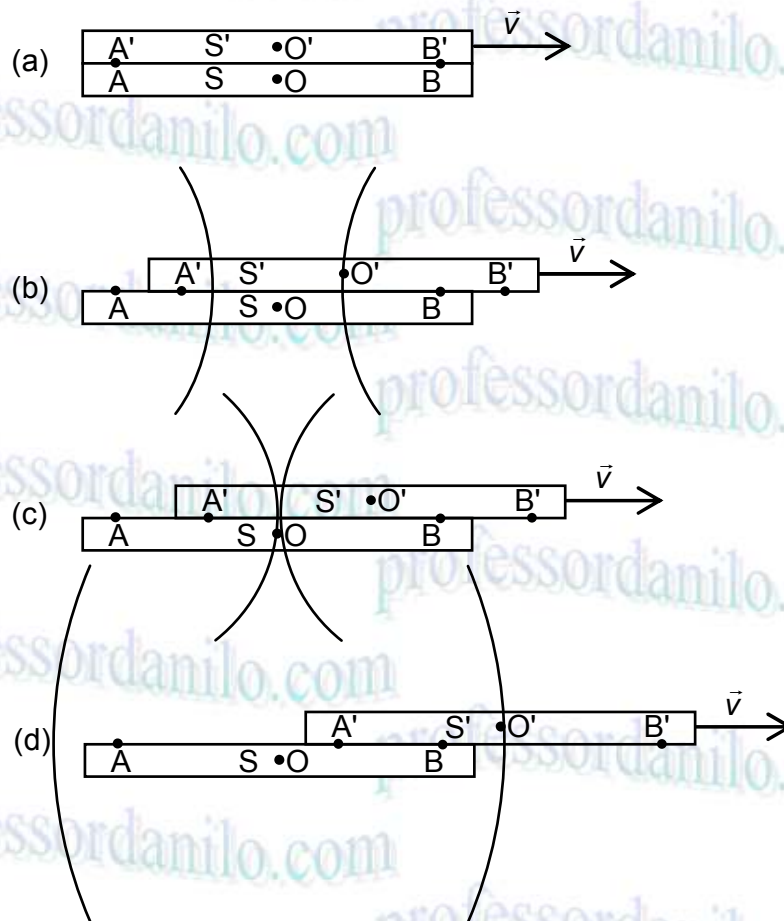


Figura 7: Duas pequenas bombas explodem no vagão deixando duas marcas A' e B' no vagão e duas marcas na plataforma A e B . (a) As duas bombas explodem e deixam suas marcas; (b) O sinal luminoso proveniente de B' chega na origem de S' . (c) Os sinais luminosos proveniente das duas explosões chegam simultaneamente em O . (d) O sinal proveniente de A' atinge o ponto O' .

Figura 7:

- (a) Duas bombas explodem simultaneamente para um observador localizado na plataforma S;
- (b) O Observador localizado na origem de S' vê um sinal luminoso chega do ponto A';
- (c) Os dois sinais, emitidos por A e B, chegam simultaneamente na origem O do sistema S, isto é, são observados simultaneamente;
- (d) O sinal emitido em A' finalmente chega ao observado O' localizado na origem do referencial S'.

Podemos concluir que dois eventos considerados simultâneos para um observador localizado na plataforma não serão considerados simultâneos para um referencial localizado no trem. As figuras a seguir ilustram os tempos para referenciais diferentes, isto é, para um observador em S, os relógios localizados em S' não estão sincronizados e para referenciais em S', os relógios em S não estão sincronizados.

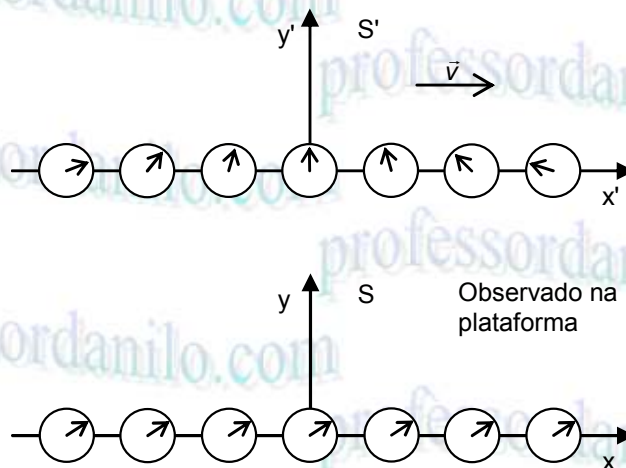


Figura 8: Para um observador em S (plataforma), o trem/laboratório se desloca para a direita com velocidade \vec{v} .

Observe na figura 8 que os relógios para $x' > 0$ estão atrasados em relação à origem de S' quando observado de S e os relógios em $x' < 0$ estão adiantados. O problema é simétrico para o referencial S, quando observado de S': na figura 8, podemos ver que os relógios localizados em S, para um observador em S',

possuem seus relógios atrasados quando $x < 0$ (no sentido da velocidade da plataforma para um observador em S') e adiantados quando $x > 0$.

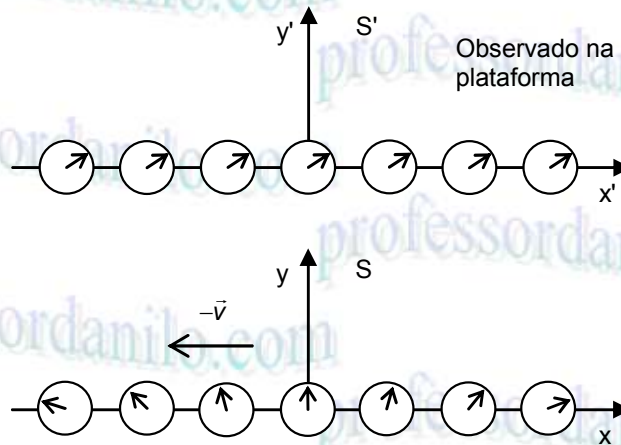


Figura 9: Para um observador em S' (trem/laboratório), a plataforma (S) se desloca para a esquerda com velocidade $-\vec{v}$.

É possível deduzir as equações de mudança de referencial, análogas às transformações de Galileu, para quais as equações do magnetismo de Maxwell são invariáveis. Não deduziremos aqui estas equações, apresentando apenas as transformações:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Note que, como no esquema apresentado nas figuras 8 e 9, o tempo possui uma dependência com a posição e velocidade. Observe também que se $v \ll c$, então $v^2/c^2 \ll 1$, e as equações acima se resumem às apresentadas no início deste texto:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t$$

Algumas discussões pertinentes devem ser feitas. Dentre elas, temos que o comprimento de um objeto qualquer será sempre o máximo se medido de um referencial para o qual o objeto esteja em repouso e este comprimento é chamado de comprimento próprio e será o mesmo para todo referencial (cuidado, pois o comprimento próprio é o mesmo para todo o referencial. Digamos que obtemos um comprimento qualquer de um corpo qualquer que se move com velocidade constante. Ao fazermos a mudança de referencial podemos calcular o comprimento próprio, e este valor será o mesmo para qualquer referencial). Da mesma forma, um intervalo de tempo entre dois

eventos (no mesmo ponto para um determinado referencial) será mínimo quando observado de um referencial parado em relação aos eventos e este tempo é chamado de tempo próprio. Além disso, veremos que a massa varia de acordo com o referencial² e o mínimo valor para a massa será obtido quando medido no referencial para o qual ela esteja em repouso e esta massa é chamada de massa de repouso ou, de forma estendida, massa própria.

Se tivermos as coordenadas do sistema S' e quisermos passar para o sistema S, basta inverter o sinal de v e permutar as grandezas com linha e sem linha:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Suponha que haja um objeto no referencial S' com velocidade u' na direção positiva de x' que medido do referencial S a velocidade seja u. A relação entre estas duas velocidades pode ser obtida substituindo a segunda equação abaixo na primeira:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = u't \quad \text{e} \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Obtemos $u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$.

Uma dedução muito comum em livros didáticos será apresentada a seguir.

Imagine que alguém dentro do trem/laboratório emita do chão um raio de luz que incide no teto do trem conforme o esquema a seguir.

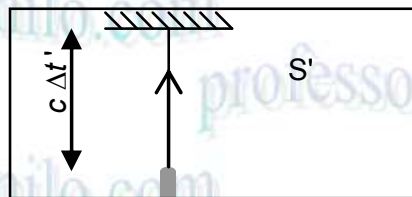


Figura 10: Um raio é emitido a partir do solo no referencial do trem. A distância entre o laser e o espelho é dada por ct'.

O mesmo evento observado por um observador fixo na plataforma pode ser representado pela figura a seguir.

² Cabe aqui observar que alguns autores não entendem o aumento da inércia de um corpo com o aumento da velocidade como sendo um aumento da inércia. Entretanto utilizamos a ideia de que é a massa que aumenta, pois não cabe uma discussão mais detalhada do assunto.

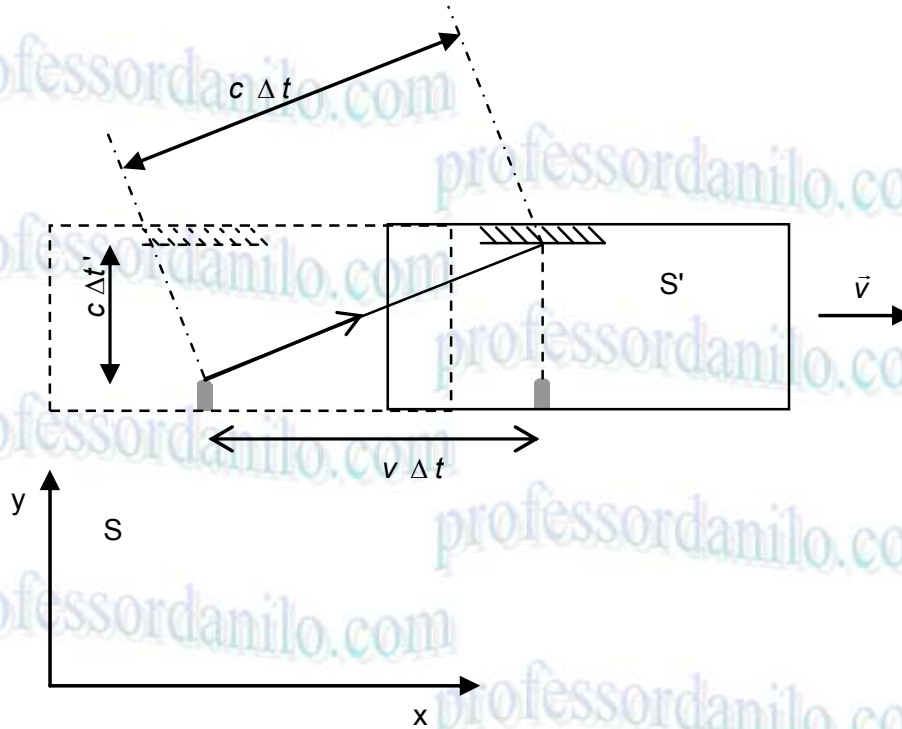


Figura 11: Um raio que foi emitido a partir do solo no referencial do trem observado por um observador na plataforma.

Na figura 10, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$(c \cdot \Delta t)^2 = (c \cdot \Delta t')^2 + (v \cdot \Delta t)^2$$

Resolvendo esta equação para Δt , obtemos:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Este resultado não foi amplamente discutido, uma vez que esta discussão pode ser encontrada no livro texto utilizado no curso, entretanto vale mostrar que podemos obter o mesmo resultado utilizando das equações de mudança de referencial anteriormente apresentadas:

Sabendo que $t_f = \frac{t'_f + (v/c^2) x'_f}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ e que $t_i = \frac{t'_i + (v/c^2) x'_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, sendo t_f é o instante

final do evento (quando o feixe de luz atinge o espelho) e t_i quando o feixe é emitido. Assim temos que

$$\Delta t = t_f - t_i = \frac{t'_f + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{t'_i + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{t'_f + (v/c^2)x' - t'_i - (v/c^2)x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{t'_f - t'_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

De uma maneira semelhante, podemos imaginar que existe um objeto de comprimento L quando medido em S e L' quando medido em S' . A relação entre L e L' será:

$$L = L' \sqrt{1-v^2/c^2}$$

Por fim, também é possível obter uma relação entre as massas, que é dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Sendo a massa m_0 medida no referencial de repouso da massa e v o módulo da velocidade da massa (ou do referencial para o qual a massa esteja em repouso).

MEMORIZANDO AS EQUAÇÕES

Seja γ o chamado coeficiente de Lorentz, sendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq 1$$

Observe que para $v > 0$, então $\gamma > 1$. Com isso, vamos às equações.

CONTRAÇÃO DOS ESPAÇOS

Visto de um referencial parado, uma barra possui comprimento L_0 . Se esta barra for medida de um referencial que se move ao longo do comprimento da barra, a medida será menor, logo:

$$L = L_0 / \gamma$$

DILATAÇÃO DOS TEMPOS

Sejam dois eventos, ocorridos no mesmo lugar para um determinado referencial. O intervalo de tempo entre ambos os eventos será mínimo se medido desse referencial, sendo chamado de tempo próprio Δt_0 . Para qualquer outro referencial, se movendo relativamente àquele, o intervalo de tempo medido será maior:

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma$$

AUMENTO DA MASSA

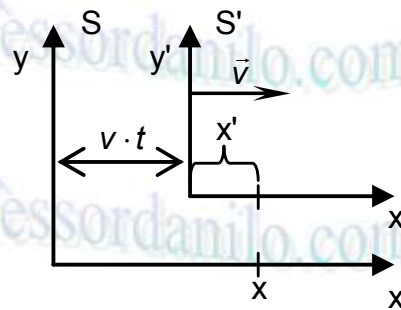
A mesma discussão do tempo vale para a massa:

$$m = m_0 \cdot \gamma$$

MUDANÇA DE COORDENADA

Utilizando-se do esquema ao lado, podemos determinar a relação de transformação. O comprimento x' medido de S será $x' \cdot \gamma$. Com isso:

$$x = v \cdot t + \frac{x'}{\gamma} \Rightarrow x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$$

**SOBRE VIAGENS NO TEMPO**

Como discutido no começo deste material, o problema se inicia quando passamos a ter certa dificuldade em sincronizarmos os relógios de um referencial. De forma muito simplificada, podemos imaginar um pulso supra luminal³ partindo da posição B' em direção à posição A' no sistema S' na figura 8. Suponha que em A' tenhamos um dispositivo que, ao receber este sinal, a bomba seja desativada. Se a velocidade for grande o suficiente, seria possível enviar um sinal impedindo que a bomba em A' não exploda.

Agora, vamos ver o que é observado para o referencial S. Não faz sentido pensar que a bomba exploda em um referencial e exploda em outro, por isso admitimos que a bomba em A' não irá explodir. Assim sendo, como para um observador em S ambas as bombas explodem simultaneamente, então, para que o evento em A não ocorra, o pulso que foi emitido em B deverá viajar para o passado para informar ao dispositivo em A que a bomba não poderá explodir.

³ Com velocidade acima da velocidade da luz

Aqui, damos um exemplo de que o objeto com velocidade supra luminar poderia voltar no tempo, e por conta disso, muitos cientistas acreditam que seria impossível passar de tal velocidade. Note também que na equação da massa (acima), se $v > c$, a raiz no denominador será complexa! Além disso, se v se aproxima de c , a raiz tende a zero e a massa tende ao infinito. Muitos então acreditam que apenas partículas sem massa de repouso⁴ poderiam passar da velocidade da luz.

O nome dado a essas partículas supra luminares, se existirem, é de *táquion*... Além disso, existem muitas discussões a respeito de contradições as viagens no tempo, dentre elas, a possibilidade de mudar o passado e, por isso, o presente deixar de ser como é.

⁴ Partículas para as quais não existe um referencial no qual ela esteja em repouso. Como exemplo, podemos citar o fóton, uma vez que não existe nenhum referencial no qual o fóton esteja em repouso.