

NOTAÇÕES

<p>C : conjunto dos números complexos</p> <p>Q : conjunto dos números racionais</p> <p>R : conjunto dos números reais</p> <p>Z : conjunto dos números inteiros</p> <p>$N = \{0; 1; 2; 3; \dots; g\}$</p> <p>$N^a = \{1; 2; 3; \dots; g\}$</p> <p>$\emptyset$: conjunto vazio</p> <p>$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$</p> <p>$\det A$: determinante da matriz A</p> <p>\overline{AB} : segmento de reta unindo os pontos A e B</p> <p>$\binom{a}{b}$: combinação de a elementos, b a b, onde a e b são inteiros maiores ou iguais a zero</p> <p>$P(X)$: conjunto de todos os subconjuntos de X</p> <p>$n(X)$: número de elementos do conjunto X (X ...nito)</p>	<p>i : unidade imaginária ; $i^2 = -1$</p> <p>$z = x + iy ; x; y \in \mathbb{R}$</p> <p>$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$</p> <p>z : módulo do número $z \in \mathbb{C}$</p> <p>$\text{Re } z$: parte real de $z \in \mathbb{C}$</p> <p>$\text{Im } z$: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$</p> <p>$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$</p> <p>$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$</p> <p>$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$</p> <p>$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$</p>
--	--

Obs.: São cartesianos ortogonais os sistemas de coordenadas considerados

Questão 1. Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos \overline{EA} e \overline{ED} interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda \overline{AF} da circunferência intercepta o segmento \overline{ED} no ponto G: Se $EB = 5$, $BA = 7$, $EC = 4$, $GD = 3$ e $AG = 6$, então GF vale

- A () 1 B () 2 C () 3 D () 4 E () 5

Questão 2. Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$: Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se $A; B \in S$, então $A \cap B$ ou $A \cup B$:

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é

- A () 2^{n-1} B () $n-2$, se n for par, e $(n-1)-2$ se n for ímpar C () $n+1$
 D () $2^n - 1$ E () $2^{n-1} + 1$

Questão 3. Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B \cap A)$, $n(A \cap B)$ e $n(A \setminus B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B \cap A) = 4$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A \cap B)$ é igual a

- A () 12 B () 17 C () 20 D () 22 E () 24

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{77} \sin[5(x + \frac{1}{4} - 6)]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-1; 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0; +1)$, então $m + n$ é igual a

- A () $\frac{2}{15}$ B () $\frac{1}{15}$ C () $-\frac{1}{30}$ D () $-\frac{1}{15}$ E () $-\frac{2}{15}$

Questão 5. Considere a equação $(a^x - a^{-x}) = (a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x , com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

- A () $(-1; 0) \cup (0; 1)$ B () $(-1; 1) \cup (1; +1)$ C () $(-1; 1)$
 D () $(0; 1)$ E () $(-1; +1)$

Questão 6. Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

- A () $4^4 \cdot 30$ B () $4^3 \cdot 60$ C () $5^3 \cdot 60$ D () $\binom{10}{7} \cdot 4^3$ E () $\binom{10}{7}$

Questão 7. Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 i \cdot 4^k \cdot \frac{1}{2^k}$:

- I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita
- II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2=3
- III. $S = 3451$
- IV. $S = 3434 + \log_8 \frac{1}{2}$

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

- A () I e III B () II e III C () II e IV D () II E () III

Questão 8. Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)f(z)} + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

- A () 1 B () 2z C () 2Re z D () 2Im z E () 2|z|^2

- Questão 9. O conjunto solução de $(\tan^2 x - 1)(1 - \cot^2 x) = 4$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, é
- A () $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$ B () $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$ C () $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$
- D () $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$ E () $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$

Questão 10. Se $\theta \in [0; 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z = |z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$, então, é verdade que

- A () $2n\theta$ é múltiplo de 2π
- B () $2n\theta - \pi$ é múltiplo de 2π
- C () $n\theta - \pi = 4$ é múltiplo de $\pi = 2$
- D () $2n\theta - \pi$ é múltiplo não nulo de 2
- E () $n\theta - \pi$ é múltiplo de π

Questão 11. A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$$

- A () $a \neq b - 2$ B () $a + b = 10$ C () $4a - 6b = 0$
- D () $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ E () $a \neq b = 24$

Questão 12. Se $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} = 1$, então o valor do $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{pmatrix}$ é igual a

- A () 0 B () 4 C () 8 D () 12 E () 16

Questão 13. Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite $1 + i$ como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e -40 . Sendo assumido que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

- A () $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{193}}{6}, 3, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{193}}{6}$ B () $2 + \sqrt{13}, 2, 2 - \sqrt{13}$
- C () $4, 2, 8$ D () $2, 3, 8$ E () $1, 2, 5$

Questão 14. Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ podemos afirmar que

- A () $x = 2$ não é raiz de p
- B () p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais
- C () p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira
- D () p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras
- E () p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais

Questão 15. Seja o sistema linear nas incógnitas x e y , com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a - b)x + (a + b)y = 1 \\ (a + b)x + (a - b)y = 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

- I. O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$
- II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos
- III. $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

- A () I B () II C () III D () I e II E () II e III

Questão 16. Considere o polinômio $p(x) = x^3 + (a + 1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a , para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

- A () $2n; n \in \mathbb{N}$ B () $4n^2; n \in \mathbb{N}$ C () $6n^2 - 4n; n \in \mathbb{N}$
- D () $n(n + 1); n \in \mathbb{N}$ E () \mathbb{N}

Questão 17. Numa circunferência C_1 de raio $r_1 = 3$ cm está inscrito um hexágono regular H_1 ; em H_1 está inscrita uma circunferência C_2 ; em C_2 está inscrito um hexágono regular H_2 e, assim, sucessivamente. Se A_n (em cm^2) é a área do hexágono H_n , então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm^2) é igual a

- A () $54\sqrt{2}$ B () $54\sqrt{3}$ C () $36(1 + \sqrt{3})$
- D () $\frac{27}{2}\sqrt{3}$ E () $30(2 + \sqrt{3})$

Questão 18. Sejam a reta $s: 12x + 5y + 7 = 0$ e a circunferência $C: x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$: A reta p , que é perpendicular a s e é secante a C , corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

- A () $\left[\frac{91}{12}; \frac{81}{12} \right]$ B () $\left[\frac{81}{12}; \frac{74}{12} \right]$ C () $\left[\frac{74}{12}; \frac{30}{12} \right]$
- D () $\left[\frac{30}{12}; \frac{74}{12} \right]$ E () $\left[\frac{75}{12}; \frac{91}{12} \right]$

Questão 19. Os focos de uma elipse são $F_1(0; -6)$ e $F_2(0; 6)$. Os pontos $A(0; 9)$ e $B(x; 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B , F_1 e F_2 é igual a

- A () $22\sqrt{10}$ B () $18\sqrt{10}$ C () $15\sqrt{10}$ D () $12\sqrt{10}$ E () $6\sqrt{10}$

Questão 20. Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base: A área total da pirâmide, em cm^2 , é

- A () $\frac{81\sqrt{3}}{2}$ B () $\frac{81\sqrt{2}}{2}$ C () $\frac{81}{2}$ D () $27\sqrt{3}$ E () $27\sqrt{2}$

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que $F = \{A_1, \dots, A_m\}$ é uma partição de A se as seguintes condições são satisfeitas:

- I. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$
- II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i, j = 1, \dots, m$
- III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$

Dizemos ainda que F é uma partição de ordem k se $n(A_i) = k$, $i = 1, \dots, m$:
Supondo que $n(A) = 8$, determine:

- (a) As ordens possíveis para uma partição de A
- (b) O número de partições de A que têm ordem 2

Questão 22. Seja $f : [0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1; & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$:

Seja $g : (1/2; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2); & 1/2 < x < 3/4 \\ f(x + 1/2); & 3/4 \leq x < 1 \end{cases}$, com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

Questão 23. Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$:

Questão 24. Determine para quais valores de $x \in (1/4; 3/4)$ vale a desigualdade

$$\log_{\cos x}(4\sec^2 x - 1) + \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2:$$

Questão 25. Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

“Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais.”

Questão 26. As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2 .

Questão 27. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1=2 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3=2 & 0 & \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1=2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1=2 & 5 & \end{pmatrix}$$

Determine o elemento C_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$:

Questão 28. Seja $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r , em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16=13$, determine o valor de $a + r$:

Questão 29. Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Questão 30. Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm^2 , do círculo inscrito neste losango.